# Speltheorie voor economen

Hans Peters*

November 2007

## Inhoud



*Departement Kwantitatieve Economie, Universiteit Maastricht. Tel.: + 31 43 3883288. E-mail: h.peters@ke.unimaas.nl.

# 1 Inleiding

Vele situaties in de economie kunnen beschouwd worden als een spel. Bedrijven in dezelfde markt concurreren door middel van prijzen of door middel van hun aanbod: niet voor niets is er in krantenberichten vaak sprake van 'spelers' in een markt. Bieders in een veiling – van kunstvoorwerpen, maar ook van openbare aanbestedingen van publieke projecten – spelen onderling een spel: men tracht te gissen wat andere bieders zullen doen, en probeert het eigen bod daaraan aan te passen. Ook in de politiek is er vaak sprake van een spel. Politieke partijen kiezen onderling posities om zoveel mogelijk stemmen te verwerven. Kiezers maken een inschatting van hoe andere kiezers zullen stemmen, en bepalen op basis daarvan hun eigen keuze.

De *speltheorie* biedt een uitgebreid instrumentarium om dergelijke situaties wiskundig te modelleren en te analyseren. We zullen hiervan een aantal voorbeelden zien. Het belangrijkste hierbij is de eerste fase: die van het modelleren. Dit betekent in de eerste plaats: vaststellen wie de *spelers* zijn. Vervolgens moet worden bepaald welke mogelijke *acties* en welke mogelijke *strategieën* een speler heeft. Het verschil tussen 'actie' en 'strategie' is vergelijkbaar met het verschil tussen het uitspelen van één kaart en het maken van een volledig speelplan in een spelletje bridge. Tenslotte moet bepaald worden welke *uitbetalingen* de spelers krijgen, afhankelijk van de gespeelde strategieën. Daarnaast moet ook nog vastgelegd worden welke *informatie* de spelers aan het begin van het spel hebben, en welke informatie ze gedurende het spel krijgen. *Onzekerheid* speelt hierbij in het algemeen een grote rol, zowel in de vorm van *objectieve kanszetten* – vergelijk met het delen van de kaarten aan het begin van een spelletje kaart – als in de vorm van *subjectieve kansen*, dat wil zeggen inschattingen van wat andere spelers gaan doen of gedaan hebben.

De spelen die we op deze manier verkrijgen worden in het algemeen met de term *niet-coöperatief* aangeduid: ieder speler speelt voor zichzelf en bepaalt zijn eigen strategie. We zullen ook enige aandacht besteden aan *coöperative spelen*: hierin staan coalitievorming en samenwerking centraal, en wordt geabstraheerd van individuele strategieën.

De beste manier om met de speltheorie kennis te maken is door middel van voorbeelden, en deze zullen in dit stuk dan ook centraal staan.

# 2 Dilemma van de gevangenen

Het ongetwijfeld bekendste voorbeeld uit de speltheorie is het zogenaamde *dilemma van de gevangenen*. Twee verdachten ($I$ en $II$) hebben samen een inbraak gepleegd. Er is echter niet voldoende bewijs, tenzij de ene verdachte de andere verraadt. Zonder bewijs is de gevangenisstraf 1 maand, met bewijs 10 maanden. Wanneer een verdachte zijn makker verraadt krijgt hij een maand strafreductie.

Dit is een spel met twee spelers, $I$ en $II$. Ieder speler heeft twee mogelijke *acties*, namelijk de andere speler verraden ($V$) of niet ($N$). Onder een *strategie* zullen we in het algemeen verstaan: een volledig plan om het spel te spelen. Aangezien in dit geval de spelers gelijktijdig en onafhankelijk van elkaar een actie kiezen, zijn deze twee acties tevens de twee mogelijke strategieën: immers, het kiezen van $V$ of $N$ is een volledig speelplan. De uitbetalingen zijn hier identiek aan het aantal maanden gevangenisstraf met een minteken ervoor: bij uitbetalingen denken we aan iets wat de spelers graag hebben en willen maximaliseren. We kunnen deze uitbetalingen dan handig in een zogenaamde *bimatrix* – een dubbele matrix – weergeven, als volgt.

$$\begin{array}{ccc} & & II \\ & & \begin{array}{cc} V & N \end{array} \\ I & \begin{array}{c} V \\ \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} -9,-9 & 0,-10 \\ & \\ -10,0 & -1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Zo bezien kiest $I$ dus een rij en $II$ een kolom. Het eerste getal in elk paar is (per definitie) de uitbetaling aan $I$ en het tweede getal de uitbetaling aan $II$.

In dit geval is de analyse van het spel gemakkelijk. Voor beide spelers is $V$ altijd echt beter dan $N$, dat wil zeggen ongeacht wat de andere speler doet. We zeggen wel dat $V$ een *dominante strategie* is, en $N$ *gedomineerd*. In zo'n geval zullen beide spelers $V$ spelen, hetgeen resulteert in de uitbetaling $-9$ voor elk. Merk op dat, indien beiden $N$ zouden spelen, de uitbetaling $-1$ voor elk zou zijn. In economisch terminologie zeggen we dat de uitbetalingen $(-9,-9)$ *Pareto gedomineerd* zijn door $(-1,-1)$, en het strategieënpaar $(V,V)$ *Pareto gedomineerd* wordt door $(N,N)$.[1] Niettemin houdt $(N,N)$ geen stand: elke speler heeft de neiging ervan af te wijken, ongeacht wat de andere speler doet.

De algemene vorm van een gevangendilemma is als volgt.

$$\begin{array}{ccc} & & II \\ & & \begin{array}{cc} V & N \end{array} \\ I & \begin{array}{c} V \\ \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} a,e & c,f \\ & \\ b,g & d,h \end{pmatrix} \end{array}$$

waarbij $a > b$, $c > d$, $e > f$, $g > h$, en $a < d$, $e < h$. Net als in het getallenvoorbeeld eerder heeft elke speler een dominante strategie, namelijk $V$, en wordt $(V,V)$ Pareto gedomineerd door $(N,N)$.

Een economisch voorbeeld is als volgt. Twee bedrijven verkopen een vergelijkbaar product. Elk procent marktaandeel levert een netto-opbrengst van 1. Zonder te adverteren heeft elk bedrijf 50% van de markt. De kosten van adverteren zijn gelijk aan 10 maar adverteren levert een vergroting van het marktaandeel op van 20% ten koste van het andere bedrijf. De bedrijven nemen hun beslissing om wel of niet te adverteren gelijktijdig en onafhankelijk van elkaar.

[1] In het algemeen betekent de uitspraak dat $A$ Pareto gedomineerd wordt door $B$, dat $A$ voor alle betrokkenen minstens zo goed is als $B$, en voor minstens één betrokkene echt beter.

De totale markt heeft een vaste omvang onafhankelijk van hoeveel er geadverteerd wordt. Deze situatie leidt tot het volgende spel.

$$\begin{array}{cc} & \quad II \\ & \begin{array}{cc} A & N \end{array} \\ I \begin{array}{c} A \\ \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 40,40 & 60,30 \\ & \\ 30,60 & 50,50 \end{pmatrix} \end{array}$$

Een duidelijk voorbeeld van een gevangenendilemma! Later (zie §7) zullen we zien hoe we aan dit dilemma kunnen ‘ontsnappen’ door het spel *herhaald* te spelen.

Het dilemma van de gevangenen doet zich ook voor bij de voorziening van collectieve goederen. Een eenvoudig voorbeeld is het volgende. Een bepaalde gemeenschappelijke voorziening kost 150. Er zijn twee personen die allebei nut 100 van deze voorziening hebben. Aan elke persoon wordt gevraagd of hij mee wil betalen of niet. De voorziening komt er alleen als minstens één persoon wil meebetalen, en de kosten worden verdeeld over de meebetalende personen. Wanneer we de bereidheid te betalen aanduiden met $b$ en het tegengestelde met $n$, wordt deze situatie door het volgende spel beschreven.

$$\begin{array}{cc} & \quad II \\ & \begin{array}{cc} b & n \end{array} \\ I \begin{array}{c} b \\ \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} 25,25 & -50,100 \\ & \\ 100,-50 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ook dit is weer een gevangenendilemma: beide spelers willen ‘meeliften’[2] met de ander.

## 3 Bimatrix-spelen

We kunnen het voorgaande (§2) gemakkelijk generaliseren. Een $m \times n$ *bimatrix spel* $(A, B)$ wordt gegeven door de uitbetalingmatrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} .$$

Meestal geven we dit weer in één matrix:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} a_{11}, b_{11} & a_{12}, b_{12} & \cdots & a_{1n}, b_{1n} \\ a_{21}, b_{21} & a_{22}, b_{22} & \cdots & a_{2n}, b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, b_{m1} & a_{m2}, b_{m2} & \cdots & a_{mn}, b_{mn} \end{pmatrix} .$$

[2] In het Engels: elke persoon gedraagt zich als een ‘free rider’.

Speler $I$, de rijspeler, kiest een rij. Speler $II$, de kolomspeler, kiest een kolom. Wanneer speler $I$ rij $i$ and speler $II$ kolom $j$ kiest, ontvangt speler $I$ de uitbetaling $a_{ij}$ en speler $II$ de uitbetaling $b_{ij}$.

Rij $i$ wordt *gedomineerd* door rij $k$ als $a_{ij} < a_{kj}$ voor alle $j = 1, \ldots, n$. Kolom $j$ wordt *gedomineerd* door klom $l$ als $b_{ij} < b_{il}$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. In het algemeen hoeven er in een bimatrix spel $(A, B)$ geen gedomineerde rijen of kolommen voor te komen. Wanneer we het 'marketing' voorbeeld van de voorafgaande paragraaf uitbreiden met de keuze $P$ voor elk bedrijf, waarbij $P$ staat voor het doorvoeren van een sterke prijsverlaging, dan zou het bijbehorende bimatrix spel er als volgt uit kunnen zien:

$$
\begin{array}{cc}
 & II \\
 & \begin{array}{ccc} \quad A & \quad N & \quad P \end{array} \\
I & \begin{array}{c} A \\ N \\ P \end{array} \begin{pmatrix} 40,40 & 60,30 & -10,40 \\ 30,60 & 50,50 & 0,40 \\ 40,-10 & 40,0 & 20,20 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

De gedachte hierbij is dat een prijsverlaging ertoe leidt dat elk procent marktaandeel nog maar 0.4 waard is, en dat een bedrijf de totale markt in handen krijgt wanneer het eenzijdig de prijs verlaagt. Merk op dat geen der beide spelers een gedomineerde strategie (rij of kolom) heeft. Wel blijft de strategieëncombinatie $(A, A)$ bijzonder vanwege de volgende reden. Als speler $I$ strategie $A$ speelt, is een 'best antwoord' van speler $II$ daarop ook $A$ te spelen, immers $N$ levert slechts 30 op, en $P$ levert ook 40 op maar niet méér. Omgekeerd is $A$ voor speler $I$ een best antwoord op $A$ van speler $II$. Een andere strategieëncombinatie in dit spel die deze eigenschap heeft, is het paar $(P, P)$: voor elke speler is $P$ een best antwoord op $P$ van de andere speler.

Het idee van 'best antwoord' kwam al voor in het werk van Cournot (1838), maar werd voor het eerst door Nash (1951) geformaliseerd. We zeggen dat rij $i$ in het bimatrix spel $(A, B)$ een *best antwoord* is op kolom $j$ als geldt: $a_{ij} \geq a_{kj}$ voor elke rij $k = 1, \ldots, m$. We zeggen dat kolom $j$ in het bimatrix spel $(A, B)$ een *best antwoord* is op rij $i$ als geldt: $b_{ij} \geq b_{il}$ voor elke kolom $l = 1, \ldots, n$. Een paar $(i^*, j^*)$ is een *Nash evenwicht* als $i^*$ een best antwoord is op $j^*$ en $j^*$ een best antwoord op $i^*$.

Wanneer we in ons voorbeeld de beste antwoorden aangeven met $^*$ boven de betreffende uitbetalingen, dan verkrijgen we:

$$
\begin{array}{cc}
 & II \\
 & \begin{array}{ccc} \quad A & \quad N & \quad P \end{array} \\
I & \begin{array}{c} A \\ N \\ P \end{array} \begin{pmatrix} 40^*,40^* & 60^*,30 & -10,40^* \\ 30,60^* & 50,50 & 0,40 \\ 40^*,-10 & 40,0 & 20^*,20^* \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

De Nash evenwichten zijn nu precies die strategieëncombinaties waarbij beide uitbetalingen van een $^*$ voorzien zijn, dus $(A, A)$ en $(P, P)$.

Zo'n Nash evenwicht heeft dus de eigenschap dat geen van beide spelers de neiging heeft ervan te willen afwijken. Hoe de spelers ertoe komen een bepaald Nash evenwicht te spelen is een andere vraag. In ons voorbeeld is de vraag niet alleen *of* er een Nash evenwicht gespeeld wordt, maar ook *welk* evenwicht. We zullen hier in ieder geval iets over zeggen in §7 over herhaalde spelen en §8 over evolutionaire spelen.

Een ander probleem is dat zo'n Nash evenwicht niet hoeft te bestaan. Stel dat beide bedrijven $I$ en $II$ fietsen produceren, en dat er twee typen fietsen zijn, een klassiek model $(K)$ en een sportief model $(S)$. Elk bedrijf kan slechts één type produceren. Bedrijf $I$ wil graag hetzelfde type als bedrijf $II$ aanbieden, aangezien bedrijf $I$ tegen lagere kosten werkt, daardoor een lagere prijs kan vragen, en zodoende de klanten van bedrijf $II$ weglokt. Om diezelfde reden wil bedrijf $II$ liever een ander type fiets produceren dan bedrijf $I$. De klantenvoorkeuren zijn verdeeld over beide fietsen, als volgt. Van elke 20 klanten hebben er 10 een voorkeur voor $K$ en 10 een voorkeur voor $S$. Van de $K$-klanten zullen er 6 ook een $S$-fiets kopen als dat de enige mogelijkheid is. Van de $S$-klanten zullen er 8 ook een $K$-fiets kopen als dat de enige mogelijkheid is. Vertaling van deze situatie naar een bimatrix spel levert op:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & II \\
 & & \begin{array}{cc} K & S \end{array} \\
I & \begin{array}{c} K \\ \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 18,0 & 10,10 \\ & \\ 10,10 & 16,0 \end{pmatrix}
\end{array},
$$

en het is duidelijk dat dit spel geen Nash evenwicht heeft.

Nash heeft hierop het volgende bedacht. Neem aan dat spelers hun strategieën kunnen kiezen volgens een bepaalde kansverdeling. Zo'n kansverdeling heet dan een *gemengde strategie*. In het voorbeeld betekent dat voor speler $I$ een kansverdeling van de vorm $(p, 1-p)$, waarbij $p$ de kans is op $K$ en $1-p$ de kans op $S$. Voor speler $II$ duiden we een gemengde strategie aan met $(q, 1-q)$, waarbij $q$ de kans is op $K$. Uiteraard moeten gelden $0 \leq p \leq 1$ en $0 \leq q \leq 1$. Kunnen we nu op een of andere manier zeggen dat een bepaalde combinatie $((p^*, 1-p^*), (q^*, 1-q^*))$ een Nash evenwicht is? Naar de geest van dit begrip zou dit moeten betekenen dat $(p^*, 1-p^*)$ een best antwoord is op $(q^*, 1-q^*)$ en vice versa. Om dit te onderzoeken moeten we met verwachte uitbetalingen werken.

Stel eens dat $p$ kleiner dan $1/2$ is. Strategy $K$ levert voor speler $II$ een verwachte uitbetaling op van $0 \cdot p + 10 \cdot (1-p)$, en dit is groter dan 5 voor $p < 1/2$. In dat geval levert $S$ een verwachte uitbetaling op van $10 \cdot p + 0 \cdot (1-p)$, hetgeen kleiner dan 5 is voor $p > 1/2$. Dus $K$ is het beste antwoord. Omgekeerd is $S$ het beste antwoord op $p < 1/2$. Speler $II$ is indifferent indien $p = 1/2$: in dat geval leveren $K$ en $S$ beide 5 op, maar dat betekent dat elke gemengde strategie $(q, 1-q)$ voor speler $II$ ook 5 oplevert, namelijk $5 \cdot q + 5 \cdot (1-q)$. Dus als $p = 1/2$ is elke gemengde strategie $(q, 1-q)$ een best antwoord van speler $II$.

Op soortgelijke wijze kunnen we beredeneren dat voor de waarde $q = 3/7$ zowel $K$ als $S$ voor speler $I$ de verwachte waarde $94/7$ opleveren, en dus levert elke strategie $(p, 1-p)$ en in het bijzonder $(p, 1-p) = (1/2, 1/2)$ deze verwachte waarde op. Met andere woorden, $(1/2, 1/2)$ van speler $I$ is een best antwoord op $(3/7, 4/7)$ van speler $II$, en het omgekeerde hebben we boven al gezien. De combinatie $((1/2, 1/2), (3/7, 4/7))$ heet een *Nash evenwicht in gemengde strategieën.* Nash heeft bewezen dat ieder bimatrix spel zo'n evenwicht heeft – merk op dat een Nash evenwicht $(i^*, j^*)$ een bijzondere vorm hiervan is, waarbij namelijk $i^*$ en $j^*$ beide met kans 1 gespeeld worden.

We zullen niet veel verder ingaan op gemengde strategieën en Nash evenwichten in gemengde strategieën, maar in §8 over evolutionaire speltheorie zullen deze begrippen vanzelf aan bod komen: daar zullen we ook een speciale betekenis kunnen toekennen aan het begrip gemengde strategie.

In ons voorbeeld lijkt het wellicht vreemd te veronderstellen dat een bedrijf zijn strategie kiest door middel van een kansproces. De manager van bijvoorbeeld bedrijf $I$ zou een dan (zuivere) munt opwerpen en afhankelijk van de uitkomst kiezen voor het klassieke of het sportmodel! Het is echter mogelijk deze kans $p = 1/2$ ook te interpreteren, niet zozeer als wat $I$ werkelijk doet, maar als wat $II$ denkt dat $I$ doet. Zodoende representeert deze kans de strategische onzekerheid van $II$ over wat $I$ doet. Ongeacht deze interpretatie blijft het gebruik van kansen in een eenmalige situatie als het spelen van een bimatrix spel in zekere mate controversieel.

# 4 Cournot en Bertrand

We veronderstellen dat er twee bedrijven zijn die een homogeen – dat wil zeggen ongeveer hetzelfde – product aanbieden. We spreken van *Cournot competitie* (Cournot, 1838) wanneer deze bedrijven wedijveren door middel van (de grootte van) hun aanbod. We spreken van *Bertrand competitie* (Bertrand, 1883) wanneer deze bedrijven wedijveren door middel van prijzen. Beide situaties worden weer gemodelleerd als een twee-persoonsspel. Een Nash evenwicht heet in het geval van Cournot competitie ook wel *Cournot evenwicht*, en in het geval van Bertrand competitie *Bertrand evenwicht.* Een verschil met de voorafgaande paragrafen is dat in deze situaties de spelers oneindig veel strategieën hebben: elke mogelijke hoeveelheid in het ene geval, en elke mogelijke prijs in het andere geval, zal een strategie zijn. In werkelijkheid is het aantal mogelijke hoeveelheden/prijzen eindig maar wel heel groot, zodat het eenvoudiger is uit te gaan van oneindig veel strategieën. Bijgevolg kunnen deze competities niet gerepresenteerd worden door middel van een bimatrix spel.

## 4.1 Cournot competitie

Twee bedrijven, 1 en 2, produceren hetzelfde product. Wanneer bedrijf 1 een hoeveelheid $q_1 \geq 0$ aanbiedt en bedrijf 2 een hoeveelheid $q_2 \geq 0$ is de prijs waarbij de totale hoeveelheid verkocht wordt, gelijk aan $p = a - q_1 - q_2$ als deze waarde niet-negatief is, en gelijk aan 0 anders. Hierbij is $a$ een gegeven positief getal. Met andere woorden, we veronderstellen een lineaire vraagfunctie, met als voornaamste reden dat dit de berekeningen gemakkelijker maakt.

Voor het gemak veronderstellen we tevens dat voor elk bedrijf de vaste kosten 0 zijn en de variabele kosten gelijk aan $c$ per eenheid product, waarbij $0 < c < a$. Hierop kan gevarieerd worden bijvoorbeeld door te veronderstellen dat de twee bedrijven verschillende variabele kosten $c_1$ en $c_2$ per eenheid product hebben, maar de bijbehorende berekeningen laten we verder achterwege.

Wanneer bedrijf 1 een hoeveelheid $q_1$ aanbiedt en bedrijf 2 een hoeveelheid $q_2$, is de winst voor bedrijf 1 gelijk aan

$$q_1(a - q_1 - q_2) - cq_1 \text{ als } q_1 + q_2 \leq a, \text{ en 0 anders,}$$

en voor bedrijf 2

$$q_2(a - q_1 - q_2) - cq_2 \text{ als } q_1 + q_2 \leq a, \text{ en 0 anders.}$$

Hiermee hebben we in feite een spel gedefinieerd. Een Nash evenwicht in dit spel is, net als voor een bimatrix spel, een paar strategieën zodanig dat elke speler een best antwoord heeft op de andere speler. Dat betekent in dit geval een paar $(q_1^*, q_2^*)$ zodanig dat, gegeven $q_2^*$, de strategie $q_1^*$ de winst van bedrijf 1 maximaliseert en, gegeven $q_1^*$, de strategie $q_2^*$ de winst van bedrijf 2 maximaliseert. Zo'n Nash evenwicht heet in deze speciale situatie *Cournot evenwicht*.

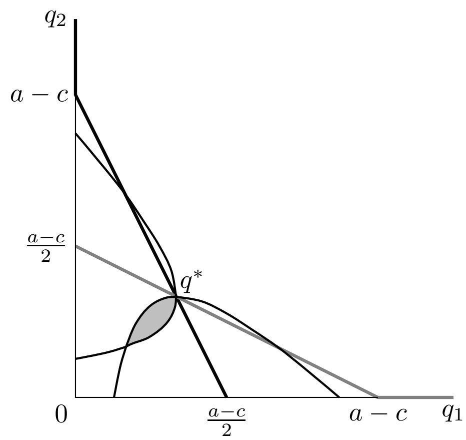
Hoe berekenen we een Cournot evenwicht? In feite gaat dit op precies dezelfde manier als in een bimatrix spel. We berekenen voor elke $q_2$ het beste antwoord van speler 1 – vergelijk dit met het bepalen van de beste rij van speler 1 voor elke kolom van speler 2 – en voor elke $q_1$ het beste antwoord van speler 2 – vergelijk dit met het bepalen van de beste kolom van speler 2 voor elke rij van speler 1.

Veronderstel dus eerst dat speler 2 de hoeveelheid $q_2 \geq 0$ kiest. Het beste antwoord van speler 1 vinden we dan door diens winstfunctie $q_1(a - q_1 - q_2) - cq_1 = q_1(a - q_1 - q_2 - c)$ te maximaliseren, waarbij $q_1$ de variabele is. Merk echter eerst op dat als $q_2 > a - c$, dan valt er voor bedrijf 1 geen positieve winst te behalen en is zodoende het beste antwoord van speler 1 gelijk aan 0. Als $q_2 \leq a - c$ dan vinden we het beste antwoord door de afgeleide van $q_1(a - q_1 - q_2 - c)$ naar $q_1$ gelijk te stellen aan 0, dus:

$$a - 2q_1 - q_2 - c = 0 \; .$$

Hieruit volgt dat $q_1$ gelijk is aan $(a - q_2 - c)/2$. Samengevat vinden we als beste antwoord van speler 1 op elke mogelijke strategie $q_2$ van speler 2:

$$q_1 = \begin{cases} (a - q_2 - c)/2 & \text{als } q_2 \leq a - c \\ 0 & \text{als } q_2 > a - c \; . \end{cases}$$




Figuur 1: Het Cournot model. De dikke zwarte lijnen geven de grafiek van de reactiefunctie van speler 1 aan, en de dikke grijze lijnen de grafiek van de reactiefunctie van speler 2. Het punt $q^*$ is het Cournot evenwicht. De twee isowinst-curven van de spelers door dit punt zijn ook weergegeven. Het gearceerde gebied bestaat uit de strategieënparen (combinaties van hoeveelheden) die het Cournot evenwicht Pareto domineren.

De berekening van het beste antwoord van speler 2 op de (elke) hoeveelheid $q_1 \geq 0$ van speler 1 gaat volkomen analoog en vanwege de symmetrie in het model volgt:

$$q_2 = \begin{cases} (a - q_1 - c)/2 & \text{als } q_1 \leq a - c \\ 0 & \text{als } q_1 > a - c\,. \end{cases}$$

De twee gevonden beste-antwoord functies worden in deze context meestal *reactiefuncties* genoemd. Het Cournot evenwicht bestaat uit hoeveelheden die beste antwoord op elkaar zijn, en is daarom gelijk aan het snijpunt van de reactiefuncties. De situatie is weergegeven in Figuur 1.

Uit de figuur blijkt dat het Cournot evenwicht verkregen wordt als het snijpunt van de lijnen $q_1 = (a - c - q_2)/2$ en $q_2 = (a - c - q_1)/2$. Dit snijpunt is

$$(q_1^*, q_2^*) = (\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3})\,.$$

In de figuur zijn ook de curves getekend waarop de winsten van de spelers gelijk zijn aan de winst in het Cournot evenwicht, dus aan $(a-c)^2/9$. Het gearceerde gebied bevat de combinaties van strategieën waarbij de winsten voor beide bedrijven minstens gelijk en voor minstens één bedrijf hoger zijn. Deze combinaties *Pareto domineren* dus het evenwicht (vergelijk §2). Een typisch voorbeeld hiervan is de combinatie

$$(q_1^m, q_2^m) = (\frac{a-c}{4}, \frac{a-c}{4})\,,$$

met winst $(a-c)^2/8$ voor elk bedrijf. Merk op dat elk bedrijf hierbij de helft van de monopoliehoveelheid $(a-c)/2$ aanbiedt, en dat daarmee de totale gezamenlijke winst gemaximaliseerd wordt. De combinatie $(q_1^m, q_2^m)$ is echter geen evenwicht, en dus heeft elke speler de neiging hiervan af te wijken. We komen hierop terug in §7 over herhaalde spelen.

Een andere situatie ontstaat wanneer het ene bedrijf $i$ zijn beslissing over $q_i$ eerst neemt, en het ander bedrijf $j$ hierop kan reageren met een hoeveelheid $q_j$. Bedrijf $i$ is dan de (markt)leider, en bedrijf $j$ de volger. Ook hierop komen we later terug, zie §6.

## 4.2 Bertrand competitie

Bij Bertrand competitie zijn de prijzen de strategische variabelen. Veronderstel dat er twee bedrijven zijn (1 en 2) die hetzelfde product aanbieden. De totale marktvraag is afhankelijk van de prijs: $q = a - p$, waarbij $a > 0$ – als $p > a$ veronderstellen we dat de vraag 0 is. De bedrijven hebben geen vaste kosten maar wel constante variabele kosten $c$ per eenheid product, waarbij $0 < c < a$ verondersteld wordt. We nemen verder aan dat het bedrijf dat de laagste prijs vraagt, de hele markt bedient. Bij gelijke prijzen bedient elk bedrijf de helft van de markt.

Wanneer bedrijf 1 een prijs $p_1$ vraagt en bedrijf 2 een prijs $p_2$, is de winst voor bedrijf 1 gelijk aan:

$$\Pi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(a - p_1) & \text{als } p_1 < p_2 \\ (p_1 - c)(a - p_1)/2 & \text{als } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{als } p_1 > p_2 \ . \end{cases}$$

Voor bedrijf 2 is de winst

$$\Pi_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_2 - c)(a - p_2) & \text{als } p_2 < p_1 \\ (p_2 - c)(a - p_2)/2 & \text{als } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{als } p_2 > p_1 \ . \end{cases}$$

Hiermee is weer het hele spel gedefinieerd. Een Nash evenwicht is nu een paar prijzen $(p_1^*, p_2^*)$ zodanig dat $p_1^*$ een best antwoord is op $p_2^*$ en omgekeerd. Zo'n evenwicht heet in dit model een *Bertrand evenwicht*.

Ook hier kunnen we een evenwicht weer bepalen door voor elke $p_2$ de beste antwoorden van speler 1 en voor elke $p_1$ de beste antwoorden van speler 2 te bepalen. We zullen echter een andere methode volgen.

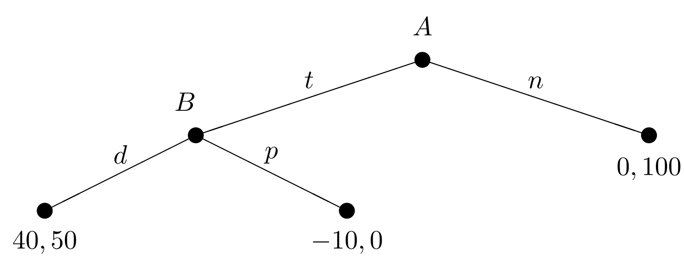
Stel dat $(p_1^*, p_2^*)$ een evenwicht is. Laten we eerst eens veronderstellen dat deze prijzen ongelijk zijn, zeg $p_1^* < p_2^*$. Dan moet gelden $p_1^* \geq c$, anders zou speler 1 een negatieve winst hebben: dat kan nooit een best antwoord zijn aangezien ieder speler door een prijs gelijk aan $c$ winst 0 kan garanderen. Stel $p_1^* > c$. Dan kan speler 2 zijn winst van 0 naar positief veranderen door een prijs $p_2$ tussen $c$ en $p_1$ te vragen, en dus zou $(p_1^*, p_2^*)$ geen evenwicht zijn. Er moet dus gelden $c = p_1^* < p_2^*$, maar ook dat is geen evenwicht aangezien speler 1 door een kleine prijsverhoging zijn winst van 0 naar positief kan veranderen.

De conclusie is dus dat in evenwicht $p_1^* = p_2^*$. Uiteraard zijn deze prijzen weer minstens $c$, anders hadden de spelers negatieve winst, maar kunnen deze prijzen ook niet echt groter dan $c$ zijn, aangezien een speler dan zijn winst vergroten kan door een ietwat lagere prijs te vragen, daarmee zijn marktaandeel verdubbelend. Dus de enige mogelijkheid is $p_1^* = p_2^* = c$, en het is eenvoudig na te gaan dat dit inderdaad een evenwicht is: geen enkele speler kan een grotere (dus positieve) winst halen door een andere prijs te vragen, als de tegenstander prijs $c$ vraagt.

Bij deze extreme vorm van prijscompetitie worden de prijzen omlaag gedreven naar het niveau van de marginale kosten, en maken beide bedrijven winst 0. Het mogelijke duidelijk zijn dat ook dit evenwicht verre van Pareto optimaal is: een voor de hand liggende prijzencombinatie die het Bertrand evenwicht Pareto domineert is het paar $p_1 = p_2 = (a + c)/2$ van monopolieprijzen, waardoor de totale winst $(p - c)(a - p)$ gemaximaliseerd wordt. We komen hierop terug in §7 over herhaalde spelen.

# 5 Spelen in uitgebreide vorm

Net als bij vrijwel alle gezelschapsspelen is het ook in de meeste economische situaties niet zo dat spelers gelijktijdig en onafhankelijk van elkaar een zet doen. Als eerste en eenvoudige illustratie hiervan bekijken we de volgende situatie. Bedrijf $A$ heeft de mogelijkheid zich in een markt te begeven waar bedrijf $B$ zich al bevindt. Wanneer bedrijf $A$ dit doet, heeft bedrijf $B$ twee opties: de toetreding van $A$ accepteren en de markt delen; of een prijzenoorlog starten waardoor de winst van beide bedrijven naar 0 wegzakt. Eén procent marktaandeel vertegenwoordigt een waarde van 1. De toetredingskosten (omschakelen van de productie, marketing) voor bedrijf $A$ bedragen 10. Wanneer bedrijf $A$ niet toetreedt, behoudt bedrijf $B$ de volledige markt en maakt bedrijf $A$ (althans op deze markt) geen winst. Figuur 2 geeft deze situatie weer.




Figuur 2: Toetredingsspel. Toetreding wordt aangeduid met $t$ en geen toetreding met $n$. Het starten van een prijzenoorlog wordt aangeduid met $p$, het delen van de markt met $d$. De uitbetalingen zijn voor resp. $A$ en $B$.

Zoals uit de figuur blijkt neemt $A$ eerst de beslissing om toe te treden of niet, en vervolgens beslist $B$ om de toetreding te accepteren dan wel een prijzenoorlog te starten.

Zelfs in deze eenvoudige situatie moeten we al iets langer stilstaan bij het begrip 'strategie'. Een *strategie* is een volledig plan om het spel te gaan spelen. In het bijzonder betekent dit dat een strategie bedacht wordt vóór de eerste zet in het spel gespeeld wordt. In het onderhavige voorbeeld betekent dat weer dat $A$ twee mogelijke strategieën heeft, namelijk $t$ en $n$, en dat $B$ ook twee mogelijke strategieën heeft, namelijk $d$ en $p$. Daarbij betekent $d$: als $A$ toetreedt dan zullen we de markt delen, en $p$: als $A$ toetreedt dan zal ik een prijzenoorlog starten. Zo gauw elke speler een strategie gekozen heeft, weten we in feite hoe het spel gespeeld wordt en wat de uitbetalingen zullen zijn. We kunnen dit weergeven als een bimatrix spel:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & B \\ d & & p \end{array} \\ A \begin{array}{c} t \\ \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} 40,50 & -10,0 \\ & \\ 0,100 & 0,100 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dit spel heet de *strategische vorm* van het spel *in uitgebreide vorm* in Figuur 2. Merk op dit bimatrix spel twee Nash evenwichten heeft, namelijk $(t,d)$ en $(n,p)$. De vraag is nu of we op een zinnige manier onderscheid kunnen maken tussen deze twee Nash evenwichten.

Bij het evenwicht $(n,p)$ kunnen we ons het volgende verhaal voorstellen. Speler $B$ dreigt speler $A$ een prijzenoorlog te starten wanneer deze laatste tot de markt van $B$ toetreedt. Speler $A$ gelooft dit dreigement en treedt dus niet toe. Maar de vraag is of speler $A$ dit dreigement zou moeten geloven. Want als speler $A$ daadwerkelijk toetreedt, is het voor speler $B$ immers beter dit dreigement niet uit te voeren: $d$ levert een uitbetaling van 50 en $p$ levert een uitbetaling van 0. Men kan dus zeggen dat het Nash evenwicht $(n,p)$ gebaseerd is op een ongeloofwaardig dreigement.

Wanneer we het spel in uitgebreide vorm analyseren door vanaf de eindpunten terug te redeneren, vinden we dat speler $B$ de actie $d$ kiest, en bijgevolg dat speler $A$ de actie $t$ kiest: deze actie levert 40 op, in plaats van de uitbetaling 0 bij $n$. Deze methode van *dynamische optimalisering*[3] leidt dus tot het evenwicht $(t,d)$; het evenwicht $(n,p)$ wordt op deze manier uitgesloten. In het algemeen sluit deze methode evenwichten uit waarbij spelers in bepaalde situaties sub-optimale keuzes zouden maken.

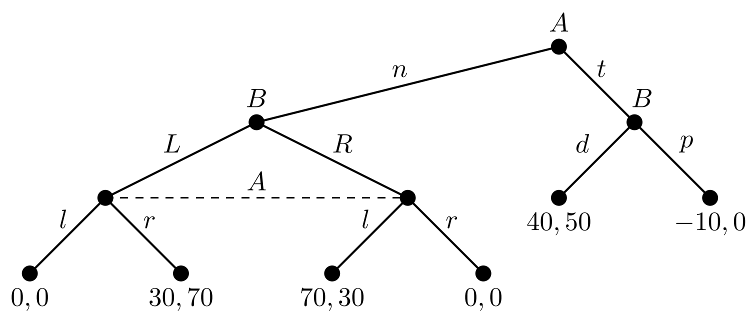
Deze methode van achterwaarts redeneren of dynamische optimalisering kan gegeneraliseerd worden tot de methode van *deelspel perfectie*[4]. Een Nash evenwicht in een spel in uitgebreide vorm heet deelspel perfect als het evenwicht een Nash evenwicht in ieder deelspel induceert. We zullen geen formele definities geven maar dit begrip aan de hand van een voorbeeld illustreren.

Veronderstel in bovenstaande situatie dat, als $A$ niet tot de markt van $B$ toetreedt, er niettemin concurrentie ontstaat op verschillende markten. Bedrijf

[3]In het Engels: 'dynamic optimization' of, in de context van de speltheorie, 'backward induction'.

[4]In het Engels: 'subgame perfection'.

$B$ kiest voor product $L$ of $R$, en tegelijkertijd kiest $A$ voor product $l$ of $r$. We veronderstellen dat zowel $l$ en $L$ als $r$ en $R$ in hoge mate substitueerbaar zijn, waardoor er een scherpe concurrentie ontstaat die de winsten naar 0 drijft. Wanneer $A$ kiest voor $r$ en $B$ voor $L$ dan zijn de winsten 30 voor $A$ en 70 voor $B$. Wanneer $A$ kiest voor $l$ en $B$ voor $R$ dan zijn de winsten 70 voor $A$ en 30 voor $B$. Het spel in uitgebreide vorm dat zo ontstaat, is weergegeven in Figuur 3.




Figuur 3: Uitbreiding van het toetredingsspel.

De stippellijn in Figuur 3 geeft aan dat, wanneer $A$ aan zet is en moet kiezen tussen $l$ en $r$, hij niet weet of $B$ gekozen heeft voor $L$ dan wel $R$: dit heet een *informatieverzameling* voor $A$. In het bijzonder kan zo'n informatieverzameling gebruikt worden om aan te geven dat de spelers gelijktijdig en onafhankelijk van elkaar hun zet doen. In dit geval betekent dit dat, wanneer $A$ niet toetreedt, $A$ en $B$ vervolgens gelijktijdig en onafhankelijk kiezen tussen respectievelijk $l$ en $r$, en $L$ en $R$.

Een strategie voor speler $A$ is een volledig speelplan, en bestaat dus uit een keuze bij aanvang van het spel, $t$ of $n$, en een keuze later in het spel, $l$ of $r$. Deze mogelijke keuzes heten *acties* en combinaties ervan (dus) strategieën. Speler $A$ heeft zodoende vier mogelijke strategieën. Ook speler $B$ heeft vier mogelijke strategieën, en voor elk paar strategieën kunnen we het verloop van het spel en de resulterende uitbetalingen bepalen. Dat levert de volgende strategische vorm van het spel op:

$$\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{array}{cccc} Ld & Lp & Rd & Rp \end{array} \\ A \begin{array}{c} tl \\ tr \\ nl \\ nr \end{array} & \begin{pmatrix} 40,50 & -10,0 & 40,50 & -10,0 \\ 40,50 & -10,0 & 40,50 & -10,0 \\ 0,0 & 0,0 & 70,30 & 70,30 \\ 30,70 & 30,70 & 0,0 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Merk op dat dit spel vijf Nash evenwichten heeft, namelijk:

$$(tl, Ld),\ (tr, Ld),\ (nr, Lp),\ (nl, Rd),\ (nl, Rp)\ .$$

We gaan nu de methode van 'deelspel perfectie' toepassen op deze evenwichten.

Wanneer $A$ toetreedt ($t$) dan ontstaat er een 'deelspel' met één speler, namelijk speler $B$, die kiest tussen $d$ en $p$. Een 'Nash evenwicht' in dit deelspel betekent eenvoudig dat $B$ optimaal kiest, d.w.z. $d$. Dit houdt in dat de evenwichten waarbij $B$ kiest voor $p$, niet deelspel perfect zijn, waarmee dus twee van de vijf Nash evenwichten boven afvallen.

Wanneer $A$ niet toetreedt ($n$) ontstaat er ook een 'deelspel', namelijk het spel waarin $A$ en $B$ gelijktijdig respectievelijk uit $l$ en $r$, en uit $L$ en $R$ kiezen. De strategische vorm van dit deelspel is:

$$\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ A\ \begin{array}{c} l \\ r \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & 70,30 \\ 30,70 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array} .$$

De Nash evenwichten van dit deelspel zijn $(l, R)$ en $(r, L)$. Deelspel perfectie eist nu dat de oorspronkelijke evenwichten (van het hele spel) een evenwicht in dit deelspel induceren. Daarmee valt het evenwicht $(tl, Ld)$ ook af, want dit induceert de combinatie $(l, L)$ in het deelspel volgend op $n$, en dat is daar geen Nash evenwicht. De deelspel perfecte Nash evenwichten zijn dus $(tr, Ld)$ en $(nl, Rd)$.

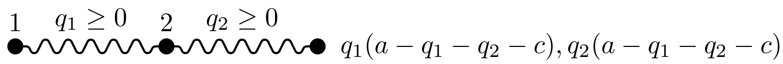
In het eerstgenoemde evenwicht zou na $n$ (niet-toetreding) het deelspel evenwicht $(r, L)$ gespeeld worden, met uitbetaling 30 voor $A$; dus kiest $A$ voor toetreding, hetgeen 40 oplevert. In het tweede evenwicht wordt na $n$ het deelspel evenwicht $(l, R)$ gespeeld, hetgeen speler $A$ uitbetaling 70 oplevert. De lezer wordt uitgenodigd om voor beide evenwichten aannemelijke verhalen te bedenken en, in het bijzonder, te laten zien dat er *geen* sprake is van 'ongeloofwaardige dreigementen'.

In de volgende paragraaf zullen we deze ideeën toepassen op het Cournot model van §4.1.

# 6 Stackelberg evenwicht

In deze paragraaf gaan we terug naar het Cournot spel van §4.1 maar veronderstellen nu dat speler (bedrijf) 1 eerst een hoeveelheid $q_1$ kiest, en dat speler 2 deze hoeveelheid observeert en vervolgens $q_2$ kiest. Dit betekent dat we te maken hebben met een spel in uitgebreide vorm. We kunnen dit niet weergeven op de manier van de voorafgaande paragraaf, aangezien elke speler oneindig veel acties heeft. Niettemin biedt Figuur 4 een schematische weergave van dit spel.

De golvende lijnen geven aan dat een speler oneindig veel verschillende acties heeft. Strikt genomen bestaat het beslispunt van speler 2 uit oneindig veel




Figuur 4: Een schematische weergave van het Stackelberg spel.

verschillende beslispunten, corresponderend met alle waarden $q_1 \in [0, \infty)$. Een strategie van speler 2 bepaalt dan ook een keuze $q_2$ voor elke $q_1$. M.a.w. een strategie van speler 2 heeft de vorm $q_2 = f(q_1)$, waarbij $f$ een volkomen willekeurige functie van $[0, \infty)$ naar $[0, \infty)$ is. Voor speler 1 is de situatie eenvoudiger: elke $q_1 \geq 0$ is een strategie.

Dit spel wordt ook wel *Stackelberg spel* genoemd met speler 1 als *leider* en speler 2 als *volger*. Een deelspel perfect evenwicht in dit spel – hierna te bepalen – heet ook wel *Stackelberg evenwicht*.

Om een deelspel perfect evenwicht te bepalen kunnen we het principe van dynamische optimalisering toepassen. Voor elke strategie van speler 1 bepalen we – net als in Figuur 2 – het beste antwoord van speler 2. Dit hoeven we niet opnieuw te berekenen: in §4.1 hebben we de reactiefunctie van speler 2 al berekend, en gevonden:

$$q_2 = \begin{cases} (a - q_1 - c)/2 & \text{als } q_1 \leq a - c \\ 0 & \text{als } q_1 > a - c\ . \end{cases}$$

Speler 1 weet zodoende wat de reactie van speler 2 zal zijn. Dus kiest speler 1 zijn hoeveelheid $q_1$ zodanig dat zijn winst

$$q_1[a - c - q_1 - (a - c - q_1/2)] = q_1(a - c - q_1)/2$$

maximaal is. Wanneer we de afgeleide uitrekenen en gelijk stellen aan 0, vinden we $q_1 = (a - c)/2$. Bijgevolg kiest speler 2 de hoeveelheid $q_2 = (a - q_1 - c)/2 = (a - c)/4$. Het Stackelberg evenwicht bestaat dus uit de strategieën $q_1^S = (a - c)/2$ voor speler 1 en $q_2^S = (a - q_1 - c)/2$ (of 0 wanneer dit negatief is) voor speler 2. De hoeveelheden in het Stackelberg evenwicht zijn $(a - c)/2$ voor 1 en $(a - c)/4$ voor 2. De winsten zijn respectievelijk $(a - c)^2/8$ en $(a - c)^2/16$. Vergeleken met het Cournot evenwicht gaat speler 1 er dus op vooruit maar speler 2 op achteruit. Dat speler 1 er niet op achteruit gaat, kan overigens ook logisch beredeneerd worden, als volgt. Wanneer speler 1 in het Stackelberg spel de Cournot hoeveelheid $(a - c)/3$ zou spelen, zou speler 2 met de Cournot hoeveelheid volgen – speler 2 speelt immers een best antwoord. In dat geval zouden beide spelers de Cournot winst behalen. Dus speler 1 kan altijd de Cournot winst garanderen.

Ook het Cournot evenwicht is niet Pareto optimaal: De hoeveelheden $q_1 = q_2 = (a - c)/4$ leveren speler 1 dezelfde winst maar speler 2 een hogere winst dan in het Stackelberg evenwicht.

# 7 Herhaalde spelen

We bekijken eerst wat er in het dilemma der gevangenen verandert wanneer dit spel meer dan eens gespeeld wordt. Vervolgens passen we dit ook toe op het Cournot spel en op het Bertrand spel. Tenslotte gaan we nog iets verder in op eindig herhaalde spelen.

## 7.1 Het dilemma der gevangenen herhaald

In het 'one-shot' dilemma der gevangenen (zie het begin van §2) is de uitkomst $(V, V)$ onontkoombaar: voor beide spelers afzonderlijk is het altijd beter $V$ te spelen. Wanneer speler $I$ zou denken dat speler $II$ strategie $N$ zou spelen, is het des te beter om $V$ te spelen.

Als dit spel twee keer gespeeld wordt, waarbij na de eerste keer de spelers weten wat er gespeeld is, en de uitbetalingen gelijk zijn aan het totaal der uitbetalingen over twee keer, verandert deze conclusie niet. Immers, de tweede (laatste) keer dat het spel gespeeld wordt is het voor elke speler het beste om $V$ te spelen. Maar als de spelers al weten dat het spel de tweede keer in $(V, V)$ zal eindigen, zullen ze ook de eerste keer allebei $V$ spelen: er valt niets te verliezen. Deze redenering blijft geldig als het spel een eindig aantal keren herhaald wordt, en de spelers precies weten wanneer ze het spel voor de laatste keer spelen.

We nemen daarom aan dat het dilemma der gevangenen steeds herhaald wordt met een (vaste) kans $\delta$, waarbij $0 < \delta < 1$. Dat betekent dat het herhaalde spel in principe oneindig lang kan duren, maar dit gebeurt met kans 0 (namelijk $\delta \cdot \delta \cdot \delta \cdot \ldots = 0$). Wanneer beide spelers steeds $V$ zouden spelen, zou hun verwachte uitbetaling gelijk zijn aan

$$-9 + (-9)\delta + (-9)\delta^2 + (-9)\delta^3 + \ldots = \frac{-9}{1-\delta} ,$$

en de *gemiddelde* uitbetaling per keer dat gespeeld wordt, is (uiteraard) gelijk aan $-9$.

Stel nu eens dat elke speler de volgende strategie $T$ in dit herhaalde spel volgt:

> begin met $N$ te spelen, en blijf dit doen totdat er een keer niet $(N, N)$ gespeeld is: speel in dat geval voortaan steeds $V$.

De letter T staat voor *trigger*: de spelers spelen 'coöperatief' totdat een speler hiervan afwijkt; in dat geval treedt de 'straf'-fase in werking. Merk op dat in deze straf-fase de spelers een evenwicht spelen: wanneer de ene speler steeds $V$ speelt kan de andere speler niets beters doen dan ook $V$ spelen. De vraag is echter waarom de spelers $N$ zouden blijven willen spelen. Om deze vraag te beantwoorden moeten we preciezer kijken naar de uitbetalingen.

Veronderstel eerst dat beide spelers zich netjes aan de strategie $T$ houden. In dat geval hebben ze beiden een verwachte uitbetaling gelijk aan

$$(-1)[1 + \delta + \delta^2 + \ldots] = \frac{-1}{1-\delta} . \tag{1}$$

Stel vervolgens dat (bijvoorbeeld) speler $I$ van de strategie $T$ wil afwijken. We kunnen zonder beperking der algemeenheid veronderstellen dat hij dit meteen aan het begin doet, aangezien de rest van het spel vanaf ieder tijdstip identiek is, en het argument dus niet verandert. Speler $I$ krijgt dan eerst 0 (de uitbetaling bij $(V, N)$); ieder keer dat het spel daarna gespeeld wordt speelt speler $II$ de actie $V$ (namelijk volgens $T$), en kan speler $I$ niets beters doen dan ook $V$ spelen. Dus de verwachte uitbetaling voor speler $I$ is dan:

$$0 + (-9)[\delta + \delta^2 + \ldots] = \frac{-9\delta}{1-\delta} \,. \tag{2}$$

Hieruit volgt dat speler $I$ *niet* zal willen afwijken van de strategie $T$ als de uitbetaling in (2) niet groter is dan de uitbetaling in (1), dus als

$$\frac{-1}{1-\delta} \geq \frac{-9\delta}{1-\delta} \,,$$

hetgeen het geval is voor $\delta \geq 1/9$. In feite hebben we hiermee aangetoond dat het paar strategieën $(T, T)$ een deelspel perfect Nash evenwicht[5] is in het herhaalde dilemma der gevangenen mits $\delta \geq 1/9$.

Deze 'trigger' strategieën kunnen natuurlijk ook gebruikt worden in het voorbeeld aan het einde van §2, waarin elk bedrijf kiest om te adverteren of niet. Men kan zich voorstellen dat deze beslissingen iedere periode (bijvoorbeeld elke week) opnieuw genomen moeten worden. In dat geval zal elk van beide bedrijven niet adverteren zolang het andere bedrijf dat ook niet doet, en anders overgaan tot in iedere periode adverteren. Wanneer $\delta$ maar groot genoeg is (in dit voorbeeld $\delta \geq 1/2$), zullen deze strategieën een (deelspel perfect) evenwicht vormen.

Het is mogelijk de parameter $\delta$ te interpreteren als discontovoet, bijvoorbeeld $\delta = 1/(1 + r)$, waarbij $r$ de rentevoet is. In dat geval kunnen de uitbetalingen in het herhaalde spel geïnterpreteerd worden als stromen van verdisconteerde uitbetalingen, d.w.z., als netto contante waarden. Het nadeel van deze interpretatie is dat we daarmee impliciet veronderstellen dat het spel oneindig vaak herhaald wordt, hetgeen moeilijk voor te stellen is.

### 7.1.1 Folk Theorem

We hebben boven gezien hoe we, bijvoorbeeld in het spel van de adverteerders, de gemiddelde uitbetalingen $(40, 40)$ en $(50, 50)$ in deelspel perfecte evenwichten van het herhaalde spel kunnen krijgen. Maar dit zijn lang niet de enige mogelijkheden. De spelers zouden bijvoorbeeld op de oneven tijdstippen de combinatie $(A, N)$ en op de even tijdstippen de combinatie $(N, A)$ kunnen spelen. Dit levert een gemiddelde uitbetaling per spel op van $(1/2)(60, 30) + (1/2)(30, 60) = (45, 45)$. Dit kan weer bereikt worden door een soort van 'trigger' strategieën: zogauw er van dit patroon $(A, N)$, $(N, A)$, $(A, N)$, $(N, A)$, $\ldots$ wordt afgeweken,

[5] De eigenschap van deelspel-perfectie volgt uit het feit dat ook in de 'straf'-fase de spelers een evenwicht spelen: de straf-fase is 'geloofwaardig'.

gaan beide spelers voortaan $A$ spelen. Dus in de 'straf'-fase wordt het evenwicht $(A, A)$ gespeeld. Men kan weer berekenen dat, voor $\delta$ groot genoeg[6], deze strategieën een deelspel perfect evenwicht vormen. Algemener geldt voor elk paar van gemiddelde uitbetalingen dat door herhaald spelen bereikbaar is en waarbij beide spelers strikt meer krijgen dan 40, dat deze gemiddelden verkregen kunnen worden in een deelspel perfect evenwicht, mits $\delta$ groot genoeg is. Een dergelijk resultaat heet in de literatuur *Folk Theorem*.

## 7.2 Het Cournot spel herhaald

We kunnen bovenstaande ideeën ook op het Cournot-spel van §4.1 toepassen. Veronderstel weer dat het Cournot spel gespeeld wordt op de tijdstippen $t = 1, 2, \ldots$ met kansen resp. $1, \delta, \delta^2, \ldots$ M.a.w., we beginnen het spel op tijdstip $t = 1$ en spelen steeds met kans $\delta$ opnieuw. Na elke keer dat er gespeeld is, vernemen de spelers wat er gespeeld is. Beschouw de volgende 'trigger'-strategie $T$:

> Begin met de actie $(a-c)/4$ en blijf deze actie spelen zolang er $((a-c)/4, (a-c)/4)$ gespeeld is; speel anders voortaan steeds $(a-c)/3$.

De strategie $T$ houdt dus in dat een speler begint met de helft van de monopoliehoeveelheid aan te bieden, en dit blijft doen zolang de andere speler dit ook doet; wanneer de andere speler afwijkt, wordt voortaan steeds de Cournot hoeveelheid aangeboden. In de 'straf'-fase spelen de spelers dus steeds Cournot, hetgeen op elk tijdstip het unieke evenwicht van het Cournot-spel is.

Wanneer zullen de spelers zich aan de strategie $T$ houden? Veronderstel dat speler 2 de strategie $T$ speelt. Wanneer speler 1 dan ook $T$ speelt, is zijn verwachte uitbetaling (cf. §4.1):

$$\frac{(a-c)^2}{8}(1 + \delta + \delta^2 + \ldots) = \frac{(a-c)^2}{8}\frac{1}{1-\delta} \ . \qquad (3)$$

Stel nu dat speler 1 (zonder beperking der algemeenheid) op tijdstip $t = 1$ wil afwijken van de strategie $T$. Aangezien speler 2 dan vanaf $t = 2$ de Cournot-hoeveelheid gaat aanbieden, rest speler 1 niets beters dan datzelfde te doen vanaf tijdstip $t = 2$: immers, de Cournot hoeveelheid is het beste antwoord op de Cournot hoeveelheid. Wat is de optimale afwijking van speler 1 op tijdstip $t = 1$? Aangezien speler 2 dan de actie $(a - c)/4$ speelt, vinden we het beste antwoord van speler 1 door deze hoeveelheid in te vullen in diens reactiefunctie $q_1 = (a - c - q_2)/2$, dus $q_1 = (a - c - (a - c)/4)/2 = (3/8)(a - c)$. Op $t = 1$ is daarmee de uitbetaling (winst) voor speler 1 gelijk aan

$$\frac{3}{8}(a-c)\left(a - c - \frac{3}{8}(a-c) - \frac{1}{4}(a-c)\right) = \frac{9}{64}(a-c)^2 \ .$$

[6]Namelijk $\delta \geq 1/2$.

Dus optimaal afwijken van $T$ wanneer speler 2 strategie $T$ speelt, levert speler 1 op:

$$\frac{9}{64}(a-c)^2 + \frac{1}{9}(a-c)^2(\delta + \delta^2 + \ldots) = \frac{9}{64}(a-c)^2 + \frac{1}{9}(a-c)^2\frac{\delta}{1-\delta} \ . \qquad (4)$$

Om te voorkomen dat speler 1 afwijkt mag de uitbetaling in (4) niet groter zijn dan die in (3), dus

$$\frac{9}{64}(a-c)^2 + \frac{1}{9}(a-c)^2\frac{\delta}{1-\delta} \leq \frac{(a-c)^2}{8}\frac{1}{1-\delta} \ ,$$

hetgeen impliceert dat $\delta$ minstens gelijk aan 9/17 moet zijn. Voor deze waarden van $\delta$ is de combinatie $(T,T)$ weer een deelspel perfect Nash evenwicht in het herhaalde Cournot-spel.

Dit evenwicht kan geïnterpreteerd worden als kartelvorming. De twee bedrijven maken een 'stilzwijgende afspraak'[7] over hun marktaanbod: ze bieden tezamen de monopoliehoeveelheid aan. De bedrijven houden zich aan de afspraak, ondanks het feit dat er per periode geen evenwicht gespeeld wordt, omdat het schenden van de afspraak leidt tot verhoogde competitie en dus lagere toekomstige winsten: wanneer de toekomst zwaar genoeg telt – i.e., $\delta$ groot genoeg is – zullen de bedrijven niet afwijken. Bovendien is de 'straf'-fase geloofwaardig in die zin dat de bedrijven ook dan een evenwicht spelen: ze spelen zelfs per periode een evenwicht.

In de meeste gevallen is kartelvorming onwettig, met name omdat de consumenten (hogere prijs) en de overheid (lagere belastingopbrengsten) er het slachtoffer van kunnen zijn.

## 7.3 Het Bertrand spel herhaald

In het herhaalde Bertrand spel (zie §4.2) zouden de spelers een kartel kunnen vormen en beiden de monopolieprijs $(a+c)/2$ vragen. Elk bedrijf heeft de neiging een net iets lagere prijs te vragen en daarmee de hele markt te veroveren. Om dit te voorkomen kan het andere bedrijf overgaan op de prijs $p = c$ (marginale kosten) wanneer een bedrijf van het kartel afgeweken is. Deze trigger strategieën vormen een evenwicht wanneer geldt

$$\Pi^m \leq \frac{\Pi^m}{2}\frac{1}{1-\delta} \ .$$

Hierbij is $\Pi^m$ de monopoliewinst $(a-c)^2/4$. De uitdrukking links is de winst bij afwijken: eenmalig (praktisch) de monopoliewinst, gevolgd door winst nul (prijs gelijk aan marginale kosten) in het vervolg. De uitdrukking rechts is de verwachte winst per speler van het kartel. De ongelijkheid geldt wanneer $\delta \geq 1/2$.

[7] In het Engels: *tacit collusion*, d.w.z. dat deze samenwerking niet formeel/contractueel vastgelegd kan worden, meestal omdat deze onwettig is.

## 7.4 Eindig herhaalde spelen

De voorgaande resultaten over herhaalde spelen berusten essentieel op de veronderstelling dat de spelers nooit weten of ze voor de laatste keer spelen. Maar ook in een eindige herhaling kunnen soms verrassende resultaten bereikt worden. We geven hiervan een voorbeeld, zonder in algemeenheid te treden.

Het volgende spel hebben we in §3 al bekeken:

$$
\begin{array}{cc}
 & II \\
 & \begin{array}{ccc} A & N & P \end{array} \\
I \begin{array}{c} A \\ N \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 40,40 & 60,30 & -10,40 \\ 30,60 & 50,50 & 0,40 \\ 40,-10 & 40,0 & 20,20 \end{pmatrix}
\end{array} .
$$

Dit is de marketing-versie van het dilemma der gevangenen, voor elke speler uitgebreid met de 'prijzenoorlog' strategie $P$. Stel dat dit spel twee keer gespeeld wordt, bijvoorbeeld deze maand en de volgende maand. Na de eerste keer spelen wordt bekend welke acties beide spelers gespeeld hebben, zodat elke speler zijn actie voor de tweede keer hierop kan baseren. Stel nu dat de spelers afspreken om de eerste keer $N$ te spelen, met uitbetaling 50 voor elk. Tevens belooft elke speler de tweede keer $A$ te spelen wanneer de eerste keer inderdaad $(N, N)$ gespeeld is, maar $P$ indien dit niet het geval is. Dat betekent voor de tweede keer dat er ofwel $(A, A)$ gespeeld wordt ofwel $(P, P)$: aangezien zowel $(A, A)$ als $(P, P)$ Nash evenwichten van bovengegeven spel zijn, kan geen der spelers méér verdienen door af te wijken bij de tweede keer spelen. Gebruik makend van dit inzicht spelen de spelers de eerste keer het *gereduceerde spel*

$$
\begin{array}{cc}
 & II \\
 & \begin{array}{ccc} A & N & P \end{array} \\
I \begin{array}{c} A \\ N \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 60,60 & 80,50 & 10,60 \\ 50,80 & 90,90 & 20,60 \\ 60,10 & 60,20 & 40,40 \end{pmatrix}
\end{array} ,
$$

dat verkregen is door de vervolg-uitbetalingen, d.w.z. $(40, 40)$ indien $(N, N)$ gespeeld wordt, en $(20, 20)$ in alle andere gevallen, bij de betalingen van de eerste keer op te tellen. In dit gereduceerde spel is $(N, N)$ inderdaad een evenwicht! In feite hebben we een deelspel-perfect evenwicht gevonden waarbij de eerste keer de combinatie $(N, N)$ gespeeld wordt, welke in het 'one-shot' spel geen evenwicht is. Dit is mogelijk omdat we de tweede keer een 'beloning' hebben voor niet-afwijken bij de eerste keer in de vorm van het relatief goede evenwicht $(A, A)$, en een 'straf' voor afwijken bij de eerste keer in de vorm van het relatief slechte evenwicht $(P, P)$.

# 8 Evolutionaire spelen

De gangbare speltheorie zoals tot dusver beschreven gaat uit van een grote mate van 'rationaliteit' van de spelers: in een evenwicht moet iedere speler in staat zijn te bedenken wat de andere speler(s) doet (doen), te bedenken wat de andere speler(s) denkt (denken) wat hij (de eerste speler) doet, enz. In de evolutionaire speltheorie, waarvan we hier een enkel aspect kort behandelen, is deze veronderstelling niet nodig en bereiken de spelers een evenwicht in een dynamisch proces van natuurlijke selectie. De evolutionaire speltheoretische benadering komt dan ook voort uit de biologie.

Veronderstel een bedrijfstak met een aantal bedrijven. Elk bedrijf heeft twee mogelijke strategieën, namelijk een agressieve strategie (lage prijzen, acties om klanten bij andere bedrijven weg te lokken) en een minder agressieve strategie. De eerste strategie duiden we aan met *havik* en de tweede met *duif*. De bijbehorende uitbetalingen in een bimatrix-spel zijn als volgt:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{havik} & \text{duif} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{havik} \\ \text{duif} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & 3,1 \\ 1,3 & 2,2 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Dit spel representeert de situatie dat er twee bedrijven in de bedrijfstak zijn. De lezer kan gemakkelijk een verhaal bij deze uitbetalingen bedenken.

We zullen vervolgens veronderstellen dat er niet twee maar heel veel bedrijven zijn, en dat deze bedrijven steeds weer in bilaterale competities verwikkeld raken. Dat wil zeggen, over de tijd komt elk bedrijf steeds opnieuw in competitie met steeds weer andere bedrijven. Er zullen bedrijven verdwijnen maar ook weer nieuwe bedrijven bijkomen. We veronderstellen bovendien dat *havik* en *duif* niet zozeer te kiezen acties zijn, maar eerder het type bedrijf beschrijven. Dus er zijn havik-bedrijven en duif-bedrijven, *haviken* en *duiven*.[8] Stel dat op een gegeven moment het percentage haviken gelijk is aan $x \cdot 100$, waarbij $0 \le x \le 1$. Wanneer een havik in competitie komt met een ander bedrijf, is dit laatste dus met kans $x$ ook een havik en met kans $1-x$ een duif. De *verwachte* uitbetaling van een havik is dan gelijk aan

$$x \cdot 0 + (1-x) \cdot 3 = 3 - 3x \; .$$

Zo ook is de verwachte uitbetaling van een duif gelijk aan

$$x \cdot 1 + (1-x) \cdot 2 = 2 - x \; .$$

De *gemiddelde* uitbetaling in de hele bedrijfstak is dus gelijk aan

$$x \cdot (3-3x) + (1-x) \cdot (2-x) = 2 - 2x^2 \; .$$

We veronderstellen nu dat het percentage haviken (en duiven) met de tijd verandert, en dat deze verandering evenredig is met de mate waarin de verwachte

[8] In de biologie wordt dit aangeduid met 'Hawk-Dove game'. Het gaat dan om agressieve en passieve exemplaren van een en dezelfde soort die om broedplaatsen wedijveren. De uitbetalingen representeren dan de 'offspring', dus het aantal nakomelingen.

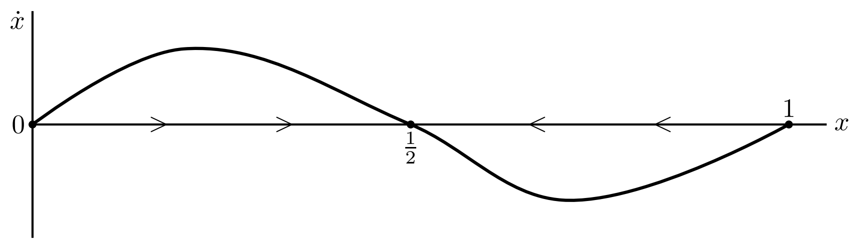
uitbetaling afwijkt van het gemiddelde. Het percentage neemt toe wanneer de verwachte uitbetaling hoger is dan het gemiddelde, en af wannneer deze lager is dan het gemiddelde. Om precies te zijn, laten we het percentage haviken op tijdstip $t$ aangeven met $x(t)$ en de afgeleide naar de tijd met $x'(t)$. Dan geldt

$$x'(t) = x(t)\left[(3 - 3x(t)) - (2 - 2(x(t))^2)\right] \ .$$

Kortheidshalve laten we het tijdsargument meestal weg en schrijven we $\dot{x}$ in plaats van $x'(t)$, dus

$$\dot{x} = x\left[3 - 3x - 2 + 2x^2\right] = x\left[1 - 3x + 2x^2\right] = (1 - x)(1 - 2x) \ .$$

Deze vergelijking beschrijft een dynamisch proces en wordt ook wel *replicator-vergelijking*[9] genoemd. We kunnen $\dot{x}$ in een plaatje weergeven als functie van $x$, zie Figuur 5.




Figuur 5: Replicator-vergelijking voor het havik-duif-spel.

Merk op dat $\dot{x}$ drie nulpunten heeft, namelijk $x = 0$, $x = 1/2$, en $x = 1$. In deze nulpunten veranderen $x$ en dus de percentages haviken en duiven niet: ze heten ook wel de *rustpunten* van het dynamische proces. Als $x = 0$ zijn er alleen duiven, als $x = 1$ zijn er alleen haviken, en als $x = 1/2$ zijn er evenveel duiven als haviken.

De replicator-vergelijking representeert een evolutionair selectie-proces. Biologische evolutie heeft nog een ander belangrijk kenmerk, namelijk het voorkomen van genetische *mutaties*. Ook in ons voorbeeld kunnen we spreken van dergelijke mutaties. Stel dat er alleen duiven zijn ($x = 0$). Wanneer een enkele duif muteert naar een havik – dus wanneer een bedrijf op het idee komt agressief te gaan spelen en bijvoorbeeld de prijs te verlagen, dus van type verandert – wordt $x$ positief. Uit Figuur 5 kunnen we dan aflezen dat $x$ gaat toenemen: de tijdsafgeleide in de buurt van 0 is positief. Met andere woorden, hoewel $x = 0$ een rustpunt is, is deze situatie niet *stabiel*: een geringe mutatie doet het systeem veranderen in de richting van $x = 1/2$.

Hetzelfde geldt voor het rustpunt $x = 1$. Een enkele mutatie, waardoor $x$ kleiner dan 1 wordt, doet het systeem verschuiven in de richting $x = 1/2$: voor $x$ dicht bij 1 is de tijdsafgeleide negatief, zie Figuur 5, waardoor $x$ verder afneemt.

Voor het rustpunt $x = 1/2$ geldt dit duidelijk niet. Wanneer een enkele havik in een duif muteert en $x$ kleiner dan 1/2 wordt, wordt de tijdsafgeleide

[9] In het Engels 'replicator dynamics'.

positief, waardoor $x$ weer toeneemt. Wanneer een enkele duif in een havik muteert en $x$ groter dan $1/2$ wordt, wordt de tijdsafgeleide negatief, waardoor $x$ weer afneemt. Het rustpunt $x = 1/2$ is dus een stabiel rustpunt, en wel het enige stabiele rustpunt. Er is dan een stabiele situatie ontstaan waarin de helft van het aantal bedrijven zich als een havik gedraagt en de andere helft als een duif.

Aan het einde van §3 hebben we kort gesproken over zogenaamde gemengde strategieën. In het havik-duif-spel kunnen we de percentages $(x, 1-x)$ ook opvatten als de gemengde strategie van een speler. Voor $x = 1/2$ betekent dat, dat speler 1 (de rijspeler) de gemengde strategie $(1/2, 1/2)$ speelt, en speler 2 (de kolomspeler) ook. Merk nu op dat, wanneer speler 2 deze strategie speelt, de bovenste rij, *havik* voor speler 1 de verwachte uitbetaling $1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 3 = 3/2$ oplevert, en dat de onderste rij *duif* ook $3/2$ oplevert, namelijk $1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 2$. Dus beide strategieën van speler 1 leveren dezelfde verwachte uitbetaling op, hetgeen weer inhoudt dat elke gemengde strategie deze verwachte uitbetaling oplevert en dus een best antwoord is. In het bijzonder is $(1/2, 1/2)$ een best antwoord van speler 1 op de gemengde strategie $(1/2, 1/2)$ van speler 2. Dit argument gaat omgekeerd volledig analoog, zodat $(1/2, 1/2)$ ook een best antwoord van speler 2 op de gemengde strategie $(1/2, 1/2)$ van speler 1 is. We hebben dus laten zien dat $((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$ een gemengd Nash evenwicht is. Het is bovendien *symmetrisch*, hetgeen betekent dat beide spelers dezelfde strategie spelen. De strategie $(1/2, 1/2)$ wordt ook wel *evolutionair stabiele strategie* genoemd: de precieze definitie laten we hier achterwege. Wat ons voorbeeld illustreert is, dat dergelijke strategieën ondersteund en verklaard worden door een onderliggend dynamisch proces waarin de spelers relatief eenvoudige 'overlevings-strategieën' volgen, als beschreven door de replicator-vergelijking.

# 9 Veilingen

Een veiling is een manier om iets tegen een zo hoog mogelijke prijs proberen te verkopen. Denk aan kunstveilingen en – economisch relevanter – veilingen ter aanbesteding van een groot project (bijvoorbeeld een nieuwe spoorlijn) of ter verhandeling van electriciteit. Gezien vanuit de deelnemers aan de veiling is het juist een manier om een gewild iets tegen een hopelijk goede prijs te bemachtigen.

Bekende typen veilingen zijn de Engelse veiling waarbij de biedingen steeds hoger worden (*ascending auction*) en de Hollandse veiling (bijvoorbeeld de bloemenveiling in Aalsmeer) waarbij de prijs steeds lager wordt (*desecnding auction*).

We zullen ons hier beperken tot twee eenvoudige typen van veilingen. Voor beide typen geldt dat elke bieder slechts één bod uitbrengt, in een gesloten envelop. De veilingmeester opent de enveloppen en de hoogste bieder wint. Het verschil zit in de prijs die de hoogst bieder betaalt: in het eerste type veiling is dat diens eigen bod, maar in het tweede type is dat het bod van de op één na hoogste bieder. Het eerste type veiling heet *first price sealed bid auction* en het tweede type heet *second price sealed bid auction*. Wij zullen beide typen eenvoudig aanduiden met *Veiling I* en *Veiling II*.

Om een en ander formeel te maken, veronderstellen we dat er $n$ bieders zijn die deelnemen aan een veiling van één object. De waardering van dat object voor bieder $i$ is $v_i$, en we veronderstellen: $v_1 > v_2 > \ldots > v_n > 0$. Wanneer bieder $i$ een bod $b_i \geq 0$ uitbrengt en de veiling wint, is diens uitbetaling gelijk aan $v_i - b$, waarbij $b$ de te betalen prijs is; anders is de uitbetaling gelijk aan 0.

Bij beide typen veilingen brengen de bieders gelijktijdig en onafhankelijk van elkaar een bod uit, hetgeen resulteert in de biedvector $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. De winnaar is de bieder met het hoogste bod, d.w.z. de grootste $b_i$. Wanneer twee of meer bieders hetzelfde hoogste bod uitbrengen, is (voor het gemak) de winnaar degene met het laagst nummer. Bijvoorbeeld, wanneer bidder 4 en bidder 9 beiden het hoogste bod uitbrengen – dus $b_4 = b_9 > b_i$ voor alle $i \neq 4, 9$ – dan wint bidder 4.

Bij Veiling I betaalt de winnaar zijn eigen bod.

Bij Veiling II betaalt de winnaar het bod van de bieder die op één na de winner is. Bijvoorbeeld, wanneer $b_4 > b_9 \geq b_i$ voor alle $i \neq 4, 9$, dan wint 4 en betaalt $b_9$. Maar wanneer $b_4 = b_9 > b_i$ voor alle $i \neq 4, 9$, dan wint 4 en betaalt $b_9 = b_4$!

Beide typen veilingen leiden dus tot een spel. De spelers zijn de $n$ bieders, de acties (strategieën) van elke speler zijn alle getallen $b \geq 0$, dus alle niet-negatieve biedingen. Gegeven een actieprofiel, dus een biedvector $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, zijn de uitbetalingen gelijk aan 0 voor de verliezers en $v_i - b$ voor de winnaar $i$. In Veiling I is $b$ gelijk aan $b_i$, in Veiling II is $b$ gelijk aan het bod van de op één na winnaar.

Een Nash evenwicht in zo'n spel is een biedvector $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, zodanig dat geen enkele speler $i$ zijn uitbetaling kan verhogen door middel van een bod $b'_i \neq b_i$.

## 9.1 Veiling I: eerste prijs

Een typisch Nash evenwicht in deze veiling is: speler 1 biedt $v_2$, en elke andere speler $i$ biedt $v_i$. Spelers 1 en 2 zijn beiden de hoogste bieders maar speler 1 heeft een lager nummer en wint dus. De uitbetaling voor speler 1 is $v_1 - b_1 = v_1 - v_2$, en de uitbetaling voor de overige spelers is 0. Speler 1 kan niet verbeteren: een hoger bod betekent dat hij nog steeds wint maar meer moet betalen, een lager bod betekent dat hij verliest en dus uitbetaling 0 krijgt. De overige spelers kunnen alleen winnen door méér dan $b_1 = v_2$ te bieden, maar $v_i - b < 0$ voor elke $b > v_2$ en $i \neq 1$. Dit is dus een Nash evenwicht.

Er zijn veel meer evenwichten in dit spel. Bijvoorbeeld $(b_1, \ldots, b_n) = (v_2, v_2, 0, \ldots, 0)$ is ook een Nash evenwicht. Wel zijn er enkele algemene uitspraken te doen.

In de eerste plaats zal speler 1 in elk Nash evenwicht de veiling winnen. Want stel dat er een Nash evenwicht zou zijn waarin speler 1 niet zou winnen. De winnaar moet dan minstens $v_1$ geboden hebben, anders kan speler 1 verbeteren door het hoogste bod te evenaren. Maar dat betekent dat de winnaar $i \neq 1$ een negatieve uitbetaling heeft, namelijk hoogstens gelijk aan $v_i - v_1 < 0$, en dus kan verbeteren door bijvoorbeeld 0 te bieden. Voorts is het duidelijk dat speler 1 minstens $v_2$ biedt (en dus betaalt) in een Nash evenwicht, aangezien anders speler 2 kan verbeteren door net boven het bod van speler 1 te gaan zitten. Er zijn echter evenwichten mogelijk waarbij speler 1 meer dan $v_2$ biedt en betaalt, bijvoorbeeld $(b_1, \ldots, b_n) = (v_1, v_1, 0, \ldots, 0)$.

Bij het bestuderen van Nash evenwichten stellen we ons op het standpunt van de buitenstaander die alle informatie heeft over de waarderingen die de spelers toekennen aan het object. Een individuele speler echter kent in het algemeen de waarderingen van de andere spelers niet, en zal waarschijnlijk de neiging hebben minder te bieden dan wat het object voor hem waard is.[10] We zullen hierna zien dat bij Veiling II dit verschijnsel zich niet voordoet.

## 9.2 Veiling II: tweede prijs

Een bijzondere eigenschap van Veiling II[11], waarin de winnaar het bod van de bijna-winnaar betaalt, is dat een speler het nooit beter kan doen dan gewoon een bod te doen gelijk aan zijn waardering van het object: dus speler $i$ kan het nooit beter doen dan gewoon $v_i$ bieden. Dit is eenvoudig na te gaan. Stel dat speler $i$ het bod $v_i$ uitbrengt en de veiling wint. Een hoger bod uitbrengen verandert de situatie in het geheel niet, terwijl een lager bod uitbrengen ofwel resulteert in nog steeds winnen tegen dezelfde prijs (immers het bod van de bijna-winnaar), of in verliezen, hetgeen geen verbetering is. Stel dat speler $i$ het bod $v_i$ uitbrengt en de veiling verliest. Dan is de prijs die de winnaar betaalt minstens gelijk aan $v_i$. Dus hoger bieden en winnen kan alleen leiden tot een uitbetaling van maximaal 0, en is geen verbetering. Lager bieden maakt van $i$ geen winnaar en houdt de uitbetaling op 0.

Wanneer de spelers zich dit realiseren, zullen ze hun waarderingen bieden, resulterende in het 'natuurlijke' Nash evenwicht $(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Niettemin zijn er ook bij deze veiling vele andere Nash evenwichten. Zo is bijvoorbeeld $(b_1, \ldots, b_n) = (v_1, v_1, 0, \ldots, 0)$ nog steeds een Nash evenwicht.

## 9.3 Engelse en Hollandse veiling

Alles in ogenschouw nemend is de theoretisch meest voor de hand liggende uitkomst van Veiling I en II dat de bieder met de hoogste waardering van het object de veiling wint en een prijs betaalt gelijk aan de op een na hoogste waardering. M.a.w., speler 1 wint en betaalt $v_2$. Dit komt overeen met de voor de hand liggende uitkomst van de Engelse veiling, de veiling bij opbod. Ook daar ligt het voor de hand dat speler 1 wint en een prijs (net iets boven) $v_2$ betaalt. Bij de Hollandse veiling, waarbij de prijs langzaam daalt totdat iemand op de knop drukt, zou dit ook het geval zijn wanneer tenminste de spelers op

[10] Men kan bijvoorbeeld laten zien dat in de situatie waarin elke speler $i$ zijn eigen waardering $v_i \in [0, 1]$ kent maar van de andere spelers slechts weet dat elke waardering in het interval $[0, 1]$ gelijke kans heeft, het een (zgn. Bayesiaans) Nash evenwicht is om $[(n-1)/n]v_i$ te bieden.

[11] Deze veiling wordt ook wel *Vickrey-veiling* genoemd.

de hoogte zijn van de waarderingen van de andere spelers. In dat geval kan speler 1 wachten met drukken totdat de prijs net boven $v_2$ zit.

# 10 Coöperatieve spelen

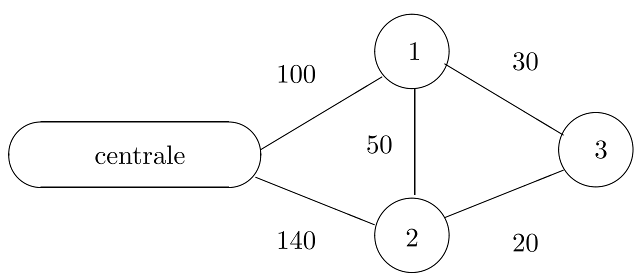
Alle spelen die we tot dusver bekeken hebben, zijn van het type dat in de literatuur algemeen aangeduid wordt als *niet-coöperatief*. Dat betekent niet zozeer dat spelers niet zouden kunnen samenwerken maar eerder dat een dergelijke samenwerking niet wettelijk bekrachtigd kan worden, bijvoorbeeld in een notarieel contract. Illustratief hiervoor is het herhaalde spel zoals besproken in §7: spelers kunnen afspraken maken maar die kunnen niet wettelijk vastgelegd worden (zijn soms zelfs bij wet verboden).

In de *coöperatieve* speltheorie gaan we ervan uit dat spelers kunnen samenwerken en dat zo'n samenwerking ook contractueel vastgelegd kan worden, zonder dat dat laatste in detail beschreven wordt. Spelers kunnen coalities vormen, en de beschrijving van het spel bestaat uit een beschrijving van wat deze coalities vermogen. Een *oplossing* van het spel bestaat uit een beschrijving van wat elke speler uiteindelijk ontvangt: hierbij wordt uiteraard rekening gehouden met de macht van de verschillende coalities die mogelijk zijn.

Om de gedachten te bepalen bespreken we een voorbeeld.

## 10.1 Het drie-steden spel

Drie steden willen verbonden worden met een electriciteitscentrale. Daartoe kunnen zij verbindingen huren. De prijzen zijn vermeld in Figuur 6. Elke ver-




Figuur 6: De verbindingen tussen de drie steden en de electriciteitscentrale.

binding in Figuur 6 kan door elke stad gehuurd worden en heeft onbeperkte capaciteit. Door verbindingen gezamenlijk te huren kunnen de steden op de kosten besparen. Een *coalitie* is een willekeurige deelverzameling van de verzameling $\{1, 2, 3\}$ van de drie steden. De kosten van een coalitie worden bepaald door de goedkoopste manier om alle steden van de coalitie met de centrale te verbinden. In het voorbeeld zijn deze kosten eenvoudig uit te rekenen; de resultaten zijn weergegeven in Tabel 1. Met de letter $S$ worden de verschillende coalities aangeduid. De kosten van een coalitie worden aangeduid door

| $S$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c(S)$ | 100 | 140 | 130 | 150 | 130 | 150 | 150 |
| $v(S)$ | 0 | 0 | 0 | 90 | 100 | 120 | 220 |

Tabel 1: Het drie-steden spel.

$c(S)$. De kosten $c(\{2,3\})$ bijvoorbeeld zijn gelijk aan $100 + 30 + 20 = 150$. In het algemeen werken we met opbrengsten (uitbetalingen) i.p.v. met kosten. In dit geval ligt het voor de hand als opbrengsten de kostenbesparingen te nemen, met als algemene formule: $v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$. Bijvoorbeeld: $v(\{2,3\}) = 140+130-150 = 120$. Deze besparingen zijn ook in Tabel 1 vermeld.

Het is duidelijk dat het voor de drie steden, de spelers in dit spel, gunstig is om samen te werken. Wanneer de drie spelers de coalitie $\{1,2,3\}$ vormen, ook wel de *grote coalitie* genoemd, is de vraag: hoe moeten de besparingen à raison van 220 verdeeld worden? Stel dat een verdeling $(x_1, x_2, x_3)$ met $x_1 + x_2 + x_3$ afgesproken wordt. Dan betaalt speler (stad 1) dus $100 - x_1$, speler 2 betaalt $140 - x_2$, en speler 3 betaalt $130 - x_3$. Zodoende wordt in totaal $100 + 140 + 130 - 220 = 150$ betaald, en dat zijn inderdaad de kosten van de grote coalitie $\{1,2,3\}$.

Men kan zich voorstellen dat een verdeling $(x_1, x_2, x_2)$ in ieder geval van dien aard zou moeten zijn dat geen enkele coalitie erop vooruit kan gaan door niet met de overige spelers samen te werken. Dat betekent om te beginnen dat elke afzonderlijke speler minstens zoveel dient te krijgen als deze speler ook alléén bewerkstelligen kan. Dus $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Datzelfde geldt dan ook voor elke coalitie met twee spelers, dus: $x_1 + x_2 \geq 90$, $x_1 + x_3 \geq 100$, en $x_2 + x_3 \geq 120$. Samen met de gelijkheid $x_1 + x_2 + x_3 = 220$ bepalen deze zes ongelijkheden de *core* van het spel. In het drie-stedenspel zijn er heel veel verschillende verdelingen in de core, bijvoorbeeld $(73\frac{1}{3}, 73\frac{1}{3}, 73\frac{1}{3})$, en $(65, 75, 80)$.

Naast de core zijn er in de literatuur nog veel andere manieren onderzocht om tot een verdeling te geraken. We beperken ons hier tot het bespreken van de zgn. Shapley waarde. Daartoe starten we met het volgende gedachtenexperiment. Stel dat de spelers onderhandelen en dat ze één voor één de onderhandelingskamer betreden. Stel dat speler 1 als eerste binnenkomt. Hij vormt dan de 1-persoonscoalitie $\{1\}$, met $v(\{1\}) = 0$. Vervolgens komt speler 2 binnen, en de spelers kunnen dan de coalitie $\{1,2\})$ vormen, met $v(\{1,2\}) = 90$. Dat wil zeggen dat speler 2 door zijn binnenkomst $90-0 = 90$ bijdraagt. Tenslotte komt speler 3 binnen, de grote coalitie wordt gevormd, en zodoende draagt speler 3 door zijn binnenkomst $220 - 90 = 130$ bij aan deze coalitie. Dit gedachtenexperiment leidt dus tot een verdelingsvector $(0, 90, 130)$. Bij dit experiment werkt de volgorde van binnenkomst sterk in het voordeel van speler 3. Er is uiteraard geen enkele *apriori* reden om het gedachtenexperiment tot deze specifieke volgorde te beperken. De *Shapley waarde* van het wordt nu verkregen door dit experiment voor elk van de zes mogelijke volgorden uit te voeren en vervolgens het gemiddelde van de zo verkregen verdelingsvectoren te nemen. Dit resulteert in Tabel 2.

| Volgorde van binnenkomst | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1,2,3 | 0 | 90 | 130 |
| 1,3,2 | 0 | 120 | 100 |
| 2,1,3 | 90 | 0 | 130 |
| 2,3,1 | 100 | 0 | 120 |
| 3,1,2 | 100 | 120 | 0 |
| 3,2,1 | 100 | 120 | 0 |
| Totaal | 390 | 450 | 480 |
| Shapley waarde | 65 | 75 | 80 |

Tabel 2: Berekening van de Shapley waarde van het drie-steden spel. De Shapley waarde wordt verkregen door de totalen door 6 te delen.

De verdelingsvector $(65, 75, 80)$ is al eerder vermeld, namelijk bij de bespreking van de core van het spel. De Shapley waarde van dit spel is inderdaad een element van de core, maar dat hoeft niet altijd zo te zijn, zie het hierna volgende voorbeeld. Je kunt zeggen dat de Shapley waarde een speler zijn gemiddelde bijdrage geeft aan de verschillende coalities.

## 10.2 Het handschoenspel

Spelers 1 en 2 bezitten beiden een rechterhandschoen en speler 3 een linkerhandschoen. Een paar handschoenen heeft een waarde van 1, losse handschoenen hebben waarde 0. Dit is stereotiep voor een situatie waarin er van sommige goederen een overschot en van andere goederen een tekort is. De spelers kunnen weer coalities vormen, en de waarde $v(S)$ van een coalitie $S$ is gelijk aan het aantal paren handschoenen dat die coalitie kan maken. Tabel 3 geeft de beschrijving van dit spel.

| $S$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(S)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Tabel 3: Het handschoenspel.

Welke verdelingen vinden we in de core van dit spel? Als $(x_1, x_2, x_3)$ zo'n verdeling is moet gelden $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ aangezien elke speler als eenling 0 heeft, en voorts natuurlijk $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Aangezien $v(\{1,3\}) = 1$ moet bovendien gelden dat $x_1 + x_3 \geq 1$, maar dat kan alleen als $x_2 = 0$. Aangezien $v(\{2,3\}) = 1$ moet gelden dat $x_2 + x_3 \geq 1$, maar dat kan alleen als $x_1 = 0$. Dus vinden we $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ als enige mogelijkheid, en deze verdeling voldoet inderdaad aan alle restricties, en is dus de unieke verdeling in de core. Dit is wat je volgens klassieke economische principes zou verwachten: er is een overschot aan rechterhandschoenen, waardoor de prijs ervan 0 is.

Wanneer we de Shapley waarde van dit spel berekenen, krijgen we Tabel 4.

| Volgorde van binnenkomst | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1,2,3 | 0 | 0 | 1 |
| 1,3,2 | 0 | 0 | 1 |
| 2,1,3 | 0 | 0 | 1 |
| 2,3,1 | 0 | 0 | 1 |
| 3,1,2 | 1 | 0 | 0 |
| 3,2,1 | 0 | 1 | 0 |
| Totaal | 1 | 1 | 4 |
| Shapley waarde | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{4}{6}$ |

Tabel 4: Berekening van de Shapley waarde van het handschoenspel.

De Shapley waarde, $(1/6, 1/6, 4/6)$, houdt er wél rekening mee dat spelers 1 en 2 enige macht hebben, immers zonder deze spelers kan speler 3 ook geen surplus genereren. In dit spel is de Shapley waarde geen element van de core.

## 10.3 Politieke macht

Coöperatieve speltheorie kan ook gebruikt worden om politieke macht te beschrijven. Stel dat een parlement 100 zetels heeft, verdeeld over drie politieke partijen $A$, $B$, en $C$, met respectievelijk 20, 30, en 50 zetels. Voor het nemen van een politieke beslissing is een absolute meerderheid ($> 50$ stemmen) noodzakelijk. Noem een coalitie *winnend* als zij zo'n absolute meerderheid heeft; anders is de coalitie *verliezend*. Wanneer we 'winnend' representeren d.m.v. het getal 1 en 'verliezend' door het getal 0, dan hebben we in feite weer het handschoenspel, zie Tabel 5.

| $S$ | $\{A\}$ | $\{B\}$ | $\{C\}$ | $\{A,B\}$ | $\{A,C\}$ | $\{B,C\}$ | $\{A,B,C\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(S)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Tabel 5: Een politiek spel.

De unieke core-verdeling is $(0, 0, 1)$. M.a.w. de core geeft in dit geval aan dat speler $C$ almachtig is. Inderdaad, $C$ is altijd nodig voor een meerderheid. In de literatuur wordt $C$ wel *veto-speler* genoemd.

Zoals uit Tabel 4 blijkt, geeft de Shapley waarde – $(1/6, 1/6, 4/6)$ – eigenlijk aan hoe vaak een speler *pivotal* is, d.w.z., hoe vaak een speler een coalitie winnend maakt door toe te treden. In dit verband heet de Shapley waarde ook wel de *Shapley-Shubik* machtsindex.

Bij de Shapley-Shubik index wordt elke volgorde van de spelers meegeteld, maar het is de vraag of dit zo natuurlijk is. Speler $C$ maakt de coalities $A$, $B$, en $\{A, B\}$ winnend door toe te treden, en het is dan de vraag of die laatste coalitie dubbel geteld moet worden, zoals bij de Shapley-Shubik index gebeurt. Wanneer we dit niet doen, krijgen we de zgn. *Banzhaf-Coleman* machtsindex. Speler $C$ maakt drie coalities winnend, en spelers $A$ en $B$ maken ieder één coalitie winnend, namelijk coalitie $\{C\}$. De Banzhaf-Coleman index van dit spel is bijgevolg gelijk aan $(1/5, 1/5, 3/5)$.

# 11 Onderhandelingstheorie

Tot slot gaan we heel kort in op onderhandelingstheorie. Stel er zijn twee spelers die door samenwerken een surplus van 1 kunnen genereren. Wanneer ze niet samenwerken hebben ze beiden 0. Deze situatie kan beschreven worden als een coöperatief spel met twee spelers (cf. §10), zie Tabel 6.

| $S$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{1,2\}$ |
|---|---|---|---|
| $v(S)$ | 0 | 0 | 1 |

Tabel 6: Een onderhandelingsprobleem.

De core van dit spel bestaat uit alle mogelijke verdelingen $(x_1, x_2)$ waarvoor $x_1, x_2 \geq 0$ en $x_1 + x_2 = 1$. De core geeft dus weinig houvast bij de bepaling van een antwoord op de vraag hoe het surplus van 1 tussen de twee spelers verdeeld zou moeten worden.

De Shapley waarde wordt berekend in Tabel 7 en is gelijk aan $(1/2, 1/2)$. Dit is een voor de hand liggende uitkomst. Voor algemenere situaties kan deze

| Volgorde van binnenkomst | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1,2 | 0 | 1 |
| 2,1 | 1 | 0 |
| Totaal | 1 | 1 |
| Shapley waarde | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Tabel 7: Berekening van de Shapley waarde van het onderhandelingsspel.

gegeneraliseerd worden naar de *Nash onderhandelingsoplossing*, maar daar gaan we hier niet verder op in.

Dit onderhandelingsprobleem kan ook vanuit de niet-coöperatieve speltheorie bekeken worden. We bespreken kort twee benaderingen.

## 11.1 Een eenvoudig vraagspel

Bekijk het volgende eenvoudige spel. Speler 1 vraagt een hoeveelheid $x_1 \in [0,1]$. Gelijktijdig en onafhankelijk vraagt speler 2 een hoeveelheid $x_2 \in [0,1]$. Wanneer $x_1 + x_2 \leq 1$, dan krijgt speler 1 de hoeveelheid $x_1$ en speler 2 de hoeveelheid $x_2$. Wanneer $x_1 + x_2 > 1$, krijgt elke speler 0. Wat zijn de Nash-evenwichten van dit spel?

Het antwoord is niet moeilijk: elke combinatie $(x_1, x_2)$ met $x_1 + x_2 = 1$ is een Nash evenwicht, het valt eenvoudig na te gaan dat in zo'n combinatie geen van de twee spelers meer kan krijgen. Daarnaast is ook $(x_1, x_2) = (1, 1)$ een Nash evenwicht (ga na!). Afgezien van dit laatste niet-efficiënte evenwicht, zijn de (efficiënte) Nash evenwichten dus precies de verdelingen in de core van het spel. Het Nash evenwichtsconcept brengt ons in dit geval niet veel verder.

## 11.2 Een alternerend vraagspel

Veronderstel nu dat speler 1 eerst een voorstel mag doen, zeg $x_1 \in [0,1]$. Als speler 2 dit voorstel accepteert is het spel over en resulteert de verdeling $(x_1, 1-x_1)$. Als speler 2 het voorstel weigert, mag hij vervolgens zelf een voorstel doen, zeg $x_2 \in [0,1]$. Als speler 1 dit voorstel accepteert is het spel over en resulteert de verdeling $(1-x_2, x_2)$. Als speler 1 dit voorstel weigert, mag hij zelf weer een voorstel doen, etc., potentieel *ad infinitum*. We nemen aan dat tijd belangrijk is: wanneer een voorstel op tijdstip $t$ geaccepteerd wordt en de bijbehorende verdeling gelijk is aan $(a, b)$, is het nut hiervan voor de spelers gelijk aan $\delta_1^t a$ voor speler 1 en $\delta_2^t b$ voor speler 2 – het startpunt is $t = 0$. Hierbij zijn $0 < \delta_1 < 1$ en $0 < \delta_2 < 1$ discontovoeten, die in principe verschillend kunnen zijn. Hoe hoger de discontovoet is, des te belangrijker is de toekomst en des te geduldiger de speler.[12]

We hebben hier te maken met een spel in uitgebreide vorm, en het ligt voor de hand te kijken naar de deelspel perfekte evenwichten in dit spel. Rubinstein heeft[13] laten zien dat zo'n evenwicht in feite uniek is en er als volgt uit ziet. Wanneer een speler een voorstel mag doen, is dit steeds hetzelfde voorstel; deze voorstellen geven de andere speler precies genoeg om het te accepteren. Het voorstel $x_1^*$ van speler 1 is zodanig dat wat speler 2 krijgt, $1 - x_1^*$, evenveel is als de verdisconteerde waarde van wat speler 2 zelf de volgende ronde zou vragen, namelijk $y_2^*$. Dus:

$$1 - x_1^* = \delta_2 y_2^* \ .$$

Het voorstel $y_2^*$ van speler 2 is zodanig dat wat speler 1 krijgt, $1 - y_2^*$, evenveel is als de verdisconteerde waarde van wat speler 1 zelf de volgende ronde zou vragen, namelijk $x_1^*$. Dus:

$$1 - y_2^* = \delta_1 x_1^* \ .$$

[12] Een discontovoet $\delta$ kan bijvoorbeeld afhankelijk zijn van de geldrente, $\delta = 1/(1+r)$.

[13] Artikel verschenen in 1982.

Deze vergelijkingen kunnen eenvoudig opgelost worden: de oplossing is

$$x_1^* = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \quad y_2^* = \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2} \; .$$

Hieruit volgt dat speler 1 op $t=0$ het voorstel $x_1^*$ doet, hetgeen door speler 2 geaccepteerd wordt. Het spel eindigt dus met de verdeling (en uitbetalingen)

$$\left( \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2} \right) \; .$$

Bij gelijke discontovoeten $\delta = \delta_1 = \delta_2$ wordt dit

$$\left( \frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta} \right) \; .$$

Speler 1 heeft daarmee een beginnersvoordeel, dat verdwijnt naarmate $\delta$ groter wordt: in de limiet $\delta \to 1$ resulteert de verdeling $(1/2, 1/2)$.